

Kombinatorik og Sandsynlighedsregning

Kombinatorik

Teori – del 1

Kombinatorik er en metode til at tælle muligheder på. Man kan f.eks. inden for valg til en bestyrelse eller et fodboldhold, kodning af en lås, valg af pinkode eller telefonnummer, eller inden for spillene lotto, tips eller poker, være interesseret i at vide, hvor mange muligheder der er i alt.

Inden vi kan begynde at tælle/beregne hvor mange muligheder der er, er vi nødt til at gøre det klart, hvad vores betingelser er. Betyder det f.eks. noget hvilken rækkefølge tallene/bogstaverne/personerne bliver valgt i – er 1, 2, 3 det samme som 3, 2, 1? Man skal også finde ud af om tallet/bogstavet/personen kan være med mere end én gang – er 1, 1, 3 f.eks. en gyldig kombination?

Til dette formål har man i kombinatorikken indført nogle begreber til at sætte disse betingelser i system.

Ordnet udtagelse:

Rækkefølgen tallene/bogstaverne/personerne udtages i er vigtig.

Uordnet udtagelse:

Rækkefølgen tallene/bogstaverne/personerne udtages i er ikke vigtig.

Med tilbagelægning:

Tallene/bogstaverne/personerne må gerne være med flere gange.

Uden tilbagelægning:

Tallene/bogstaverne/personerne må ikke være med flere gange.

Udtagelse betyder, at vi udtager et antal tal/bogstaver/personer – altså tæller kombinationer. Sådan en udtagelse kan være *enten* ordnet *eller* uordnet.

Tilbagelægning betyder om vi ”lægger tallet/bogstavet/personen tilbage i bunken” vi kan vælge fra – altså om det samme element kan være med flere gange. En udtagelse kan være *enten* med *eller* uden tilbagelægning.

Det giver os i alt fire forskellige måder at tælle antal kombinationer på.

	Uden tilbagelægning (elementet er med én gang)	Med tilbagelægning (elementet <u>kan</u> være med flere gange)
Ordnet udtagelse (rækkefølgen har betydning)	1	2
Uordnet udtagelse (rækkefølgen har ikke betydning)	3	4

Vi ser nu på hver enkelt måde at lave kombinationer på med eksempelet på næste side. Vi har 20 forskellige bogstaver (*a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t*). og vi skal udtage 3 af disse bogstaver.

1. Ordnet udtagelse uden tilbagelægning.

$$(20 \cdot 19 \cdot 18) =$$

Vi må kun bruge hvert bogstav én gang, så første gang har vi 20 valgmuligheder, anden gang har vi 19, og tredje gang har vi 18. Rækkefølgen har betydning, hvilket f.eks. vil sige at udtagelserne **a,b,c** og **a,c,b** er forskellige og derfor begge med.

2. Ordnet udtagelse med tilbagelægning.

$$(20 \cdot 20 \cdot 20) = 20^3 =$$

Vi må bruge alle 20 bogstaver hver gang, så første gang har vi 20 valgmuligheder, anden gang har vi 20, og tredje gang har vi også 20. Rækkefølgen har betydning, hvilket f.eks. vil sige at udtagelserne **a,a,c** og **c,a,a** er forskellige og derfor begge med.

3. Uordnet udtagelse uden tilbagelægning.

$$\frac{(20 \cdot 19 \cdot 18)}{(3 \cdot 2 \cdot 1)} =$$

Først ser vi på situationen hvis det var ordnet uden tilbagelægning ($20 \cdot 19 \cdot 18$). Men da rækkefølgen ikke har betydning, reduceres (*divideres*) der med antal muligheder den ordnede udtagelse kan kombineres på ($3 \cdot 2 \cdot 1$). Rækkefølgen har ikke betydning, hvilket f.eks. vil sige at udtagelserne **a,b,c** og **a,c,b** er ens og derfor kun skal med én gang.

4. Uordnet udtagelse med tilbagelægning.

$$\begin{array}{ccc} \text{Tre ens} & \text{To ens} & \text{"Et" ens (tre forskellige)} \\ \frac{20 \cdot 1 \cdot 1}{1} + \frac{(20 \cdot 19 \cdot 2)}{(2 \cdot 1)} + \frac{(20 \cdot 19 \cdot 18)}{(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \end{array}$$

Da det samme element kan være med flere gange, deler vi det op i tre situationer – **Tre ens, To ens og "Et" ens (tre forskellige)**. Rækkefølgen har ikke betydning, hvilket f.eks. vil sige at udtagelserne **a,a,c** og **c,a,a** er ens og derfor kun skal med én gang.

Hvis man ser på de udregninger, man arbejder med inden for kombinatorikken, er de egentlig ikke så svære. Man kan klare sig udelukkende med de 4 regningsarter (*addition, subtraktion, multiplikation og division*), og der er kun fire måder at lave kombinationer på. Udfordringen inden for kombinatorikken ligger i tankeprocessen og forståelsen for, hvad det er man laver, hvorfor man gør det, og hvad man får ud af det. Dette er samtidig en stor del af grundtanken inden for matematikken.

Hvis man står i en situation og skal udregne et antal kombinationer, skal man altså først finde ud af, hvilken af de fire typer udtagelser, man befinder sig inden for, inden man kan formulere et svar, der besvarer spørgsmålet.

Opgaver i kombinatorik 1

1. Hvor mange 2-cifrede tal kan man lave af tallene 2 og 3, hvis tallene må bruges flere gange?
2. Hvor mange 2-cifrede tal kan man lave af tallene 2 og 3, hvis tallene kun må bruges én gang?
3. Hvor mange 3-cifrede tal kan man lave af tallene 1, 2 og 3, hvis tallene må bruges flere gange?
4. Hvor mange 3-cifrede tal kan man lave af tallene 1, 2 og 3, hvis tallene kun må bruges én gang?
5. Hvor mange 3-cifrede tal kan man lave af tallene 1, 2, 3 og 4, hvis tallene må bruges flere gange, og hvad hedder det største og det mindste tal?
6. Hvor mange 3-cifrede tal kan man lave af tallene 1, 2, 3 og 4, hvis tallene kun må bruges én gang, og hvad hedder det største og det mindste tal?
7. Du har 6 forskellige potteplanter, som skal stilles op i en vindueskarm. På hvor mange forskellige måder kan du stille dem, når de skal stå på én række?
8. På et pizzeria kan der vælges mellem 4 forretter, 27 pizzaer og 3 desserter. Hvor mange forskellige menuer af tre retter kan der laves?
9. En anden restaurant har på sit menukort 4 forretter, 5 hovedretter og 3 desserter. Du har kun råd til forret og hovedret *eller* hovedret og dessert. Hvor mange forskellige menuer kan du sammensætte?
10. Til en klassesdiskussion skal der vælges 1 ordstyrer og 1 referent ud af klassens 24 elever. Hvor mange forskellige kombinationer er der?
11. Til elevrådet skal der vælges 2 ligeværdige medlemmer ud af klassens 24 elever. Hvor mange forskellige kombinationer er der?

12. Du skal udfylde en tipskupon med 13 fodboldkampe, men han har ingen forstand på fodbold og sætter derfor tegnene fuldstændig tilfældigt. Man kan vælge 1, X eller 2 ved hver kamp, så hvor mange kombinationer er der?
13. En pinkode til et dankort består af fire cifre (*tallene 0 til 9*). Hvor mange forskellige pinkoder kan der laves? Find svaret, både hvis tallene må bruges flere gange, og hvis de kun må bruges én gang.
14. I en tombola står der fircifrede tal på lodderne (*også f.eks. 0004 eller 0302*). Der er gevinst hver gang et sådant fircifret tal ender på 5. Hvor mange gevinstmuligheder er der?
15. Ved en matematikprøve skulle eleverne vælge seks ud af ti opgaver, som de skulle løse.
- Er dette valg en ordnet eller uordnet udtagelse?
 - Er det med eller uden tilbagelægning?
 - På hvor mange måder kan man foretage et valg?
16. I har lavet et lotteri i klassen og har solgt 100 lodsedler, der er mærket med tallene fra 00 til 99. Hovedgevinsten - den eneste gevinst - findes ved at der fra en pose udtages to cifre. I posen ligger der ti sedler, der er mærket med cifrene 0 til 9. Hvilken type udtagelse skal der laves ved lodtrækningen, for at den kan være entydig og retfærdig?
17. Du skal ind på dit værelse og skifte sokker, men desværre er lyset gået i stykker, så du kan ikke se noget. Du ved dog hvor dine sokker er, og du ved hvilke sokker, du har i skuffen, selvom de ligger i et stort rod. I skuffen har du: 6 sorte, men én af dem er i stykker, 7 blå, men på den ene af dem er der hul på hælen, 4 grønne, men her er den én der har hul på den ene tå, 8 brune, men her blev den ene misfarvet under sidste vask, 2 røde, men her er den ene begyndt at trævle op og endelig har du 7 sribede, som alle kan bruges. Hvor mange sokker skal du tage med ud af det mørke soveværelse, for at være sikker på, at du kan få et par ens og fejlfrie sokker på?

Teori – del 2

Fakultet

Når man begynder at arbejde med relativt store tal indenfor kombinatorikken bliver udregningerne hurtigt meget lange og uoverskuelige. Hvis man f.eks. skal svare på, hvor mange måder 24 elever i en klasse kan sætte sig på, vil udregningen være $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Det vil efterhånden blive omfattende at skrive alle de tal. Derfor har man indført et tegn, som man allerede kender fra sprogundervisningen. Nemlig dette tegn - !. Indenfor matematikken hedder det ikke udråbstegn, men derimod *fakultet*. Med fakultetsymbolet ville man kunne skrive ovenstående udregning som $24!$.

$$24! = 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Hvis man har et tal efterfulgt af et fakultettegn, skal man altså gange dette tal med alle mindre hele tal til og med tallet 1.

Undtagelsen fra denne ellers klare definition er at $0! = 1$.

Formlerne

De fire forskellige typer udtagelser, som vi har set på, kan beskrives med nogle mere generelle formler. At de er generelle betyder, at man skriver udregningerne med bogstaver, og derefter kan benytte formlerne ved at sætte tal ind på de forskellige pladser. Til dette formål definerer vi to bogstaver – n og r.

n = antal muligheder

r = antal pladser der skal vælges

	Uden tilbagelægning <i>(elementet er med én gang)</i>	Med tilbagelægning <i>(elementet <u>kan</u> være med flere gange)</i>
Ordnet udtagelse <i>(rækkefølgen har betydning)</i>	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Uordnet udtagelse <i>(rækkefølgen har ikke betydning)</i>	$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$	$\frac{(n-1+r)!}{(n-1)! \cdot r!}$

Øvelser i fakultet

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. Hvad er: $5! =$ | 7. Hvad er: $(10-9)! =$ |
| 2. Hvad er: $5! : 4! =$ | 8. Hvad er: $3! \cdot 3! =$ |
| 3. Hvad er: $(3+6)! =$ | 9. Hvad er: $(8-3)! \cdot 3! =$ |
| 4. Hvad er: $3! + 6! =$ | 10. Hvad er: $1! =$ |
| 5. Hvad er: $0! =$ | 11. Hvad er: $5! : (7-3)! =$ |
| 6. Hvad er: $10! - 9! =$ | 12. Hvad er: $22! : (22-4)! \cdot 4! =$ |

Opgaver i kombinatorik 2

1. I lærerrådet er der tyve personer, og der skal vælges to repræsentanter. En formand og en næstformand. Hvor mange kombinationer er der, og hvilken type udtagelse er det?
2. Hvis man i stedet for en formand og en næstformand vælger to ligeværdige repræsentanter i lærerrådet, hvor mange muligheder er der så, og hvilken type udtagelse er det?
3. Der skal vælges 8 elever, til skolens elevråd, og der er 55 elever, som gerne vil. Hvor mange kombinationsmuligheder er der?
4. Til Ekstrabladsfodbold skal drengene stille med et hold. Holdet skal bestå af 15 spillere, men der er 26, som gerne og gerne vil være med. Hvor mange mulige hold kan der stilles?
5. Der er nu udtaget 15 gode spillere, men der skal kun 11 spillere på banen ad gangen til at spille på de forskellige pladser. På hvor mange måder kan træneren lave startopstillingen, hvis alle spillere kan spille alle pladser?
6. I dag har næsten alle en cykellås med nøgle til, men før det var en almindelig cykellås ofte udstyret med 6 knapper, der hver kunne stå i 3 positioner. Hvor mange forskellige låsekompositioner findes der på sådan en cykellås og er alle låsekompositionerne lige brugbare?
7. Hvor mange kombinationer er der i lotto med 35 kugler, når der skal udtrækkes 6 tal.
8. Du har én 6-sidet terning i et raflebæger som du slår med seks gange i træk. Hvor mange kombinationer kan du slå?
9. Du har nu seks ens 6-sidede terninger i et raflebæger. Hvor mange forskellige kombinationer kan du slå?

Sandsynlighedsregning

Teori – del 1

Sandsynlighedsregning handler om at beregne sandsynligheder for forskellige *hændelser*. Hvis man skal beregne en sandsynlighed for at en bestemt hændelse sker må man først og fremmest vide, hvor mange mulige hændelser, der er i alt – det kalder vi også for *udfaldsrummet*. Det svære ved sandsynlighedsregning kan være at finde ud af, hvor stort udfaldsrummet er. Heldigvis kan et godt kendskab til kombinatorikken ofte hjælpe os med at tælle/beregne, hvor mange muligheder vi har. Udfaldsrummet er således alle de kombinationer, der findes.

Hvis vi f.eks. ville finde sandsynligheden for at trække spar konge fra et spil kort, hvis vi trak ét kort, ville vi først skulle finde vores udfaldsrum. Her kan vi ikke rigtig bruge kombinatorikken, men må tælle os frem, for at sikre os, at der er de 52 kort, der skal være i et kortspil. De 52 kort er vores udfaldsrum. Der er kun én spar konge i et kortspil så sandsynligheden for *hændelsen* at trække spar konge er 1 ud af 52.

$$\frac{1}{52} = 0,01923 \quad \text{eller} \quad \frac{1}{52} \cdot 100 = 1,923 \%$$

Vi skriver sandsynligheder som brøker med hændelsen i tælleren og udfaldsrummet i nævneren. Brøken kan godt stå som vores endelige svar, men man kan også vælge at regne brøken ud og give svaret i kommatotal eller gange kommatallet med 100 og få svaret i procent. Alle tre muligheder kan bruges, men procentsvaret er nok det mest brugte.

Herunder er en oversigt over de almindeligt brugte udtryk inden for sandsynlighedsregningen.

Udtryk	Forklaring
Udfaldsrum:	Samtlige mulige udfald i et eksperiment.
Udfald:	De enkelte forskellige muligheder i et eksperiment.
Hændelse:	Et eller flere udfald, der undersøges i et eksperiment.
Sandsynlighed:	Angives som brøk, kommatotal eller i procent (<i>Sandsynligheden ligger altid mellem 0 og 1 eller 0 % og 100%</i>) og beregnes ud fra følgende metode:

$$\frac{\text{hændelse}}{\text{udfaldsrum}} \cdot 100 = \text{sandsynligheden i procent}$$

Umulig hændelse:	Hvis sandsynligheden for en hændelse er = 0 (0%).
Sikker hændelse:	Hvis sandsynligheden for en hændelse er = 1 (100%).
Jævn sandsynlighed:	Hvis sandsynligheden er den samme for alle udfald i udfaldsrummet.
Ujævn sandsynlighed:	Kan ikke beregnes matematisk, men må afprøves i praksis.

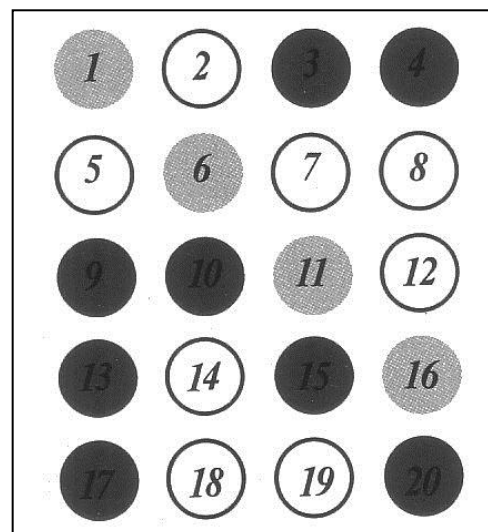
Bogstavet P

Man bruger bogstavet P som tegn for sandsynlighed. Hvis man f.eks. ser på sandsynligheden for at trække et es fra et spil kort, betyder det, at man i stedet for at skrive: ”Hvad er sandsynligheden for at trække et es?” blot kan skrive ”P(es)”.

$$P(\text{es}) = \frac{4}{52} \cdot 100 = 7,7 \%$$

Opgaver i sandsynlighedsregning 1

1. Beregn følgende ved kast med en terning:
 - a. $P(\text{en treer}) =$
 - b. $P(\text{ingen toer}) =$
 - c. $P(\text{hverken fem eller seks}) =$
 - d. $P(\text{en syver}) =$
 - e. $P(\text{lige antal øjne}) =$
 - f. $P(\text{mere end } 4) =$
 - g. $P(\text{mindre end syv}) =$
2. Beregn, ved udtrækning af et kort fra et almindeligt spil kort (52 kort), følgende:
 - a. $P(\text{en knægt}) =$
 - b. $P(\text{klør } 4) =$
 - c. $P(\text{en sort dame}) =$
 - d. $P(\text{ingen konger}) =$
 - e. $P(\text{ingen spar}) =$
 - f. $P(\text{ingen billedkort}) =$
 - g. $P(\text{røde eller sorte kort}) =$
 - h. $P(\text{et billedkort}) =$
3. I en pose ligger der de 20 kugler, der er vist på tegningen til højre. Bestem forskellige sandsynligheder for trækning af en kugle.
 - a. $P(\text{Sort kugle}) =$
 - b. $P(\text{Hvid kugle}) =$
 - c. $P(\text{Grå kugle}) =$
 - d. $P(\text{et lige tal}) =$
 - e. $P(\text{større end } 15) =$
 - f. $P(\text{større end } 5) =$
 - g. $P(\text{et primtal}) =$
 - h. $P(\text{et kvadrattal}) =$
 - i. Bestem en umulig hændelse
 - j. Bestem en sikker hændelse
4. Ved kast med en terning er udfaldsrummet seks (1,2,3,4,5,6). Man ønsker at udføre et eksperiment med en terning, hvor udfaldsrummet skal være tre, og sandsynligheden skal være jævn. Hvad gør man?



Teori – del 2

Indtil videre har vi kun set på enkle sandsynligheder, hvor eksperimentet bestod i at finde sandsynligheden for én hændelse. Man kan dog hurtigt få brug for at se på sammensatte sandsynligheder, hvor den hændelse man undersøger består af flere udfald indenfor udfaldsrummet. Vi benytter os af to principper – additionsprincippet og multiplikationsprincippet:

Additionsprincippet: Også kaldet ”enten-eller”-princippet. Man lægger sine resultater sammen.

Additionsprincippet bruges, når der kun er ét valg, hvor man enten skal vælge *enten* den ene *eller* den anden mulighed fra en samling af muligheder. Man siger at hændelserne er afhængige af hinanden – begge hændelser kan ikke indtræffe samtidig.

Hvis man f.eks. med én terning skal slå *enten* en 3’er *eller* en 5’er må der være $1 + 1 = 2$ muligheder. Vores udfaldsrum er seks, så sandsynligheden for at slå en 3’er *eller* en 5’er er.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ eller } 33,3 \%$$

Multiplikationsprincippet: Også kaldet ”både-og”-princippet. Man ganger sine resultater sammen.

Multiplikationsprincippet bruges når et valg består af flere uafhængige delvalg, hvor man *både* skal vælge fra en samling af muligheder, *og* fra en eller flere andre samlinger af muligheder. Man siger at hændelserne er uafhængige af hinanden – begge hændelser skal indtræffe.

Hvis man f.eks. med to terninger skal slå *både* en 3’er *og* en 5’er, må der være to muligheder for den første terning. Hvis den første terning bliver 3 eller 5, er der én mulighed for terning nummer 2. Der er altså $2 \cdot 1 = 2$ muligheder. Vores udfaldsrum er stadig seks, men den er seks for hver af de to terninger, så sandsynligheden for at slå en 3’er *og* en 5’er er.

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \text{ eller } 5,6 \%$$

Den modsatte hændelse

Ved beregning af en sandsynlighed kan det af og til være en fordel at beregne den modsatte hændelse.

$$P(\text{modsatte hændelse}) = 1 - P(\text{hændelse}).$$

Eksempel

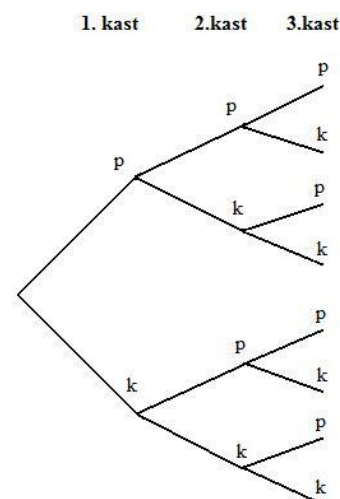
En mønt kastes tre gange. Hvad er sandsynligheden for, at den viser plat mindst én gang? Hvis vi skulle beregne det på traditionel vis, skulle vi lave tre beregninger, og derefter lægge dem sammen. Dvs. først sandsynligheden for én gang plat i tre kast, derefter to plat i tre og til sidst tre plat i tre kast. I dette tilfælde kan det dog være smart at beregne den modsatte hændelse – altså det vi ikke er interesseret i. Den modsatte hændelse er, at mønten viser krone i alle tre kast.

$$\text{Udfaldsrum} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\text{Udfald der opfylder kravet om ingen plat} = 1$$

$$P(\text{ingen plat}) = P(\text{krone i tre kast}) = 1/8.$$

$$P(\text{mindst én plat i tre kast}) = 1 - 1/8 = 7/8 \text{ eller } 87,5 \%$$



Opgaver i sandsynlighedsregning 2

1. Hvor stort er udfaldsrummet ved kast med en almindelig terning?
2. Hvor mange forskellige udfald kan man få ved kast med to ens mønter?
3. En terning og en mønt kastes samtidig.
 - a. Hvilke muligheder er der for udfaldene?
 - b. Hvor stort er udfaldsrummet?
4. Hvor stort er udfaldsrummet ved kast med en mønt og udtrækning af et kort (*fra et almindeligt spil kort*) samtidig?
5. Hvad vil det sige at en sandsynlighed er jævn?
6. Hvad er forskellen på ordene sandsynlighed, chance og risiko?
7. En mønt kastes én gang. Hvad er sandsynligheden for, at få plat?
8. Man har kastet en mønt tre gange og fået plat alle gangene. Hvad er sandsynligheden for at få plat, næste gang man kaster mønten?
9. Hvad er sandsynligheden for 2 gange plat, hvis samme mønt kastes 2 gange?
10. Hvad er sandsynligheden for hændelsen (plat, plat, krone), hvis der kastes 3 gange?
11. Hvad er sandsynligheden for hændelsen (plat, plat, krone), hvis rækkefølgen er ligegyldig?
12. Hvad er sandsynligheden for 2 seksere i træk ved to slag?
13. Hvad er sandsynligheden for at øjnenes sum er større end 6, hvis der kastes 2 gange med en terning?
14. Hvad er sandsynligheden for at øjnenes sum er mindre end 5, hvis der kaste 2 gange med en terning?

15. Hvor mange seksere kan man forvente ved kast med en terning 1.000 gange?
16. I en pose ligger der 2 røde, 3 blå og 3 grønne bolde.
- Hvad er sandsynligheden for at tage en blå bold op?
 - Hvad er sandsynligheden for at tage to blå bolde op efter hinanden?
 - Hvad er sandsynligheden for at tage 3 røde bolde op efter hinanden, hvis bolden der er trukket op lægges tilbage i posen inden næste bold trækkes?
17. Når man spiller f.eks. backgammon, slår man med to terninger samtidig og lægger antallet af øjne på de to terninger sammen.
- Hvor mange forskellige slag kan man slå?
 - Lav et skema, der viser udfaldsrummet.
 - Beregn sandsynlighederne for de forskellige slag.
 - Hvilken værdi er det mest sandsynligt, at terningerne viser tilsammen?
18. Du udfylder en tipskupon med 13 fodboldkampe helt tilfældigt. Ved hver kamp kan du vælge enten 1, X eller 2.
- Hvad er sandsynligheden for, at du har alle 13 kampe rigtig?
 - Hvordan har du fundet udfaldsrummet?
19. Du prøver nu at helgardere (*dvs. afkrydse alle tre muligheder*) to kampe.
- På hvor mange måder kan du vælge de to kampe?
 - Hvad er sandsynligheden for at få 13 rigtige, når du har helgarderet to kampe?

En lille en til hjernen

Der ligger 3 kort på bordet med bagsiden opad. Der ligger en dame til højre for en konge, og der er en dame til venstre for en dame. Der ligger en spar til venstre for en hjerter, og en spar til højre for en spar. Hvilke 3 kort er det tale om?

Retfærdigt eller uretfærdigt kortspil?

Der arbejdes i sammen i par, hvor den ene person er A og den anden B. Hvert par får 2 røde og 2 sorte kort. A blander kortene, og B skriver point ned og trækker kort. Der skal trækkes 2 kort.

- Hvis B trækker et rødt og et sort kort, får B et point.

- Hvis B trækker to røde kort eller to sorte kort får A et point.

Første person der har 20 point vinder. Inden i begynder at spille skal i gætte på, hvem der vinder.

Livsforsikringer

Forsikringsselskaber baserer sig meget på sandsynligheder, når de f.eks. skal fastsætte den præmie (*årlige pris*), man skal betale for en livsforsikring. Præmiens størrelse afhænger bl.a. af, hvad sandsynligheden er for, at den person, der vil tegne forsikringen, lever et vist antal år efter tegningen.

Dødelighedstavler

Forsikringsselskaberne gør brug af såkaldte dødelighedstavler. Tavlerne er en særlig form for statistik, der føres over befolkningens dødsalder. En dødelighedstavle kan for eksempel være opbygget, som det er vist i tabellen til højre. Af tavlen kan man læse, hvordan det går 1.000 nyfødte drenge i de 65 første leveår. F.eks. når 912 af de 1000 drenge at blive 50 år, og kun 740 af dem bliver mindst 65. Ved hjælp af tabellen kan man bestemme forskellige sandsynligheder.

Man kan f.eks. regne sig frem til, at sandsynligheden for, at en 50-årig mand når at blive 51 år er 906 ud af 912. Dvs.

$$\frac{906}{912} \cdot 100 = 99,3 \, \%$$

1. Kontroller at sandsynligheden for, at en 64årig mand bliver et år ældre, er 97,6 %.
2. Hvad er sandsynligheden for, at en nyfødt dreng bliver 60 år?
3. Hvad er sandsynligheden for, at en 55årig mand bliver et år ældre?
4. Hvad er sandsynligheden for, at en 55årig mand bliver 5 år ældre?

Tabel		
alder	levende	døde
0	1000	0
–	–	–
–	–	–
50	912	6
51	906	7
52	899	7
53	892	8
54	884	9
55	875	9
56	866	10
57	856	11
58	845	12
59	833	13
60	820	14
61	806	15
62	791	16
63	775	17
64	758	18
65	(740)	
	12718	172

En model til bestemmelse af præmien

Forsikringsselskaberne bruger som sagt sådanne tavler, når de skal udregne præmien, vi skal betale for en livsforsikring. Vi skal her se på en forenklet model.

Vi tænker os i modellen, at alle de 912 50-årige personer ønsker at tegne en forsikring. Forsikringen er indrettet sådan, at der udbetales 50.000 kr. ved hvert dødsfald, der sker inden det fyldte 65. år.

Første år skal forsikringsselskabet udbetale: $6 \cdot 50\,000 \text{ kr.} = 300.000 \text{ kr.}$

Andet år skal forsikringsselskabet udbetale: $7 \cdot 50\,000 \text{ kr.} = 350.000 \text{ kr.}$

1. Hvor mange penge skal forsikringsselskabet regne med at udbetale i alt ifølge modellen?
2. Kan det gå anderledes i virkeligheden?

Første år er der 912 personer, der betaler præmie. Andet år er der 906, der betaler præmie osv. Igennem årene betales der i alt 12.718 præmier.

1. Hvor meget hver præmie skal lyde på, hvis forsikringsselskabet skal skaffe penge nok til alle udbetalingerne.
2. Hvad ville være en rimelig præmie, hvis forsikringsselskabet skal have et overskud?